

Facharbeit

aus der **Physik**

Thema: Einführung in die Grundbegriffe der nicht-linearen Dynamik anhand des Magnetpendels.

Leistungskurs: Physik
Verfasser: Julian Mehnle
Kursleiter: Axel Kalscheuer
Abgabetermin: 02/02/1998

Erzielte Note: _____ In Worten: _____
Erzielte Punkte: _____ In Worten: _____

Unterschrift des Kursleiters

Inhalt

1. Einleitung	3
2. Grundbegriffe der Chaostheorie.....	4
2.1. Das Kausalitätsprinzip	4
2.2. Sensitivität eines Systems	4
2.3. Der Phasenraum.....	5
2.4. Attraktoren von Systemen.....	5
3. Das Magnetpendel als nichtlineares System.....	7
3.1. Versuchsaufbau	7
3.2. Durchführung und Deutung.....	8
3.3. Numerische Behandlung.....	10
3.4. Computer-Simulation	13
4. Die Simulations-Programme	17
5. Literaturverzeichnis	18
6. Selbständigkeitserklärung	19

1. Einleitung

Schon immer ist die klassische Physik von der Vorstellung geprägt gewesen, kenne man die Eigenschaften eines beliebigen Objekts, als auch seinen momentanen Zustand und die Gesetze, nach denen sein Zustand sich unter bestimmten äusseren Einwirkungen verändert, so könne man seinen Zustand für alle Ewigkeit vorhersagen. Dieses "Determinismus" genannte Prinzip wurde schon 1812 durch den französischen Gelehrten LAPLACE beschrieben:

"Eine Intelligenz, die in einem gegebenen Augenblick alle Kräfte kennte, mit denen die Welt begabt ist, und die gegenwärtige Lage der Gebilde, die sie zusammensetzen, und die überdies umfassend genug wäre, diese Kenntnisse der Analyse zu unterwerfen, würde in der gleichen Formel die Bewegung der grössten Himmelskörper und die des leichtesten Atoms einbegreifen. Nichts wäre für sie ungewiss, Zukunft und Vergangenheit lägen klar vor ihren Augen." ([02] S.154)

Diese Intelligenz bekam den Namen "Laplacescher Dämon", und die Wissenschaft schien bis vor einiger Zeit wie von ihm besessen zu sein. Erst als 1927 HEISENBERG seine Unschärferelation veröffentlichte, kam das Konstrukt des Determinismus ins Wanken. Das Unschärfeprinzip schliesst eine gleichzeitige beliebig genaue Bestimmung von Ort und Geschwindigkeit eines Teilchens aus. Somit wird es wohl niemals möglich sein, mithilfe einer Art Weltformel die gesamte Entwicklung des Universums für die Zukunft zu berechnen.

Heute hat diese Erkenntnis in viele Gebiete der Forschung Einzug gehalten: in der Chemie genauso wie in der Wettervorhersage und in der Wirtschaftswissenschaft. Tiefdruckgebiete und Aktienkurse haben eines gemeinsam: sie verhalten sich oft chaotisch. Und so ist es nicht verwunderlich, dass man sich Gedanken darüber macht, wie man in diesen komplexen Systemen Gesetzmässigkeiten erkennen kann, um beobachtete Vorgänge zu erklären und um brauchbare Prognosen für die Zukunft machen zu können.

Hier soll nun eine Einführung in die nicht-lineare Dynamik, im Volksmund oft auch Chaostheorie genannt, gegeben werden, wobei die gängigen Fachbegriffe erklärt und die Thematik anhand eines der bekanntesten Versuche, dem Magnetpendel, erläutert werden.

Ausserdem werden zwei Computeralgorithmen entwickelt, die die schnelle und genaue Berechnung der Vorgänge beim Magnetpendel-Versuch sowie die Untersuchung der Wirkung äusserer Einflüsse auf letzteren erlauben.

2. Grundbegriffe der Chaostheorie

2.1. Das Kausalitätsprinzip

Das Kausalitätsprinzip beinhaltet zwei Aussagen:

- Die schwache Kausalität: Gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen.
- Die starke Kausalität: Ähnliche Ursachen haben ähnliche Wirkungen.

Vorweg gleich dieses: die schwache Kausalität gilt immer. Ohne das Prinzip der schwachen Kausalität wäre jedes physikalische Gesetz absurd. Die schwache Kausalität wird oft auch als Determinismus bezeichnet (lat. determinare: "begrenzen, bestimmen").

Die starke Kausalität galt lange als unumstritten. Grundsätzlich stimmt auch der Satz der starken Kausalität mit der Realität überein, jedoch nur in einem engen zeitlichen Rahmen. Wird der Beobachtungszeitraum eines Experiments verlängert, so passiert es oft, dass die Wirkung der Ursache am Ende nicht mehr der Erwartung entspricht.

2.2. Sensitivität eines Systems

Der französische Mathematiker POINCARÉ schrieb 1899:

"Eine sehr kleine Ursache, die wir nicht bemerken, bewirkt einen beachtlichen Effekt, den wir nicht übersehen können, und dann sagen wir, der Effekt sei zufällig. Wenn die Naturgesetze und der Zustand des Universums zum Anfangszeitpunkt exakt bekannt wären, könnten wir den Zustand dieses Universums zu einem späteren Moment exakt bestimmen. Aber selbst wenn es kein Geheimnis in den Naturgesetzen mehr gäbe, so könnten wir die Anfangsbedingungen doch nur annähernd bestimmen. Wenn uns dies ermöglichen würde, die spätere Situation in der gleichen Näherung vorherzusagen – und dies ist alles, was wir verlangen – so würden wir sagen, dass das Phänomen vorhergesagt worden ist, und dass es Gesetzmässigkeiten folgt. Aber es ist nicht immer so; es kann vorkommen, dass kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen schliesslich grosse Unterschiede in den Phänomenen erzeugen. Ein kleiner Fehler zu Anfang wird später einen grossen Fehler zur Folge haben. Vorhersagen werden unmöglich, und wir haben ein zufälliges Ergebnis." ([01] S. 24)

POINCARÉ erkannte also schon früh, dass sich das Gesetz der starken Kausalität nicht mehr halten liess. Und so dauerte es auch nicht lange, bis HEISENBERG mit seiner Unschärfebeziehung erkannte, dass eine beliebig genaue Bestimmung der Anfangsbedingungen eines Versuchs wirklich niemals möglich sein wird.

POINCARÉ beschäftigte sich weiter mit dem Phänomen, dass ähnliche Ursachen völlig unterschiedliche Auswirkungen haben können, und schuf den Begriff der Sensitivität. Der Grad der Sensitivität eines Systems besagt, wie stark das System auf Veränderungen der Versuchsbedingungen reagiert. Veranschaulichen lässt sich dies an einem einfachen Versuch: stellt man einen Bleistift senkrecht auf einen Tisch, so dass er gerade stehen bleibt, und stösst man dann von unten gegen den Tisch, so fällt er in eine kaum vorhersagbare Richtung um. Das System ist instabil und besitzt eine sehr hohe Sensitivität.

Die Sensitivität spielt vor allem bei Systemen eine grosse Rolle, bei denen ein Fehler (z.B. Messfehler in den Anfangsbedingungen) nicht linear zur verstreichenden Zeit wächst, sondern exponentiell nach der Beziehung:

$$\delta \sim \varepsilon \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

Daher stammt auch die Bezeichnung "nicht-lineare Dynamik". δ ist hierbei der beobachtete Fehler und ε der Fehler in den Anfangsbedingungen. Der Exponent λ wird nach dem russischen Mathematiker ALEKSANDR LIAPUNOV (1857-1918) als LIAPUNOV-Exponent bezeichnet und ist ein direktes Mass für die Sensitivität eines Systems.

2.3. Der Phasenraum

Zur vollständigen Beschreibung eines Objekts gehören Angaben zu seiner Position und zu seinem Impuls, d.h. neben dem Betrag des letzteren auch seine Richtung. Vereinfachend kann man jedes Objekt in ein Koordinatensystem eintragen, das doppelt so viele Dimensionen besitzt, wie das System, in dem sich das Objekt bewegen kann. Die erste Hälfte der Dimensionen stellt den Ortsvektor des Objekts dar, die zweite Hälfte seinen Impulsvektor. Ein solches Koordinatensystem wird als Phasenraum bezeichnet. Eine Kugel, die in einer unendlich langen, geraden Rinne hin- und herrollen kann, benötigt also einen 2-dimensionalen Phasenraum: eine Dimension für die Position der Kugel und eine für ihren Impuls.

2.4. Attraktoren von Systemen

Ein Attraktor ist ein möglicher Endzustand, an den sich ein System immer mehr annähert. Daher die Bezeichnung: Ein Attraktor wirkt auf das System "anziehend". Der Attraktor der folgenden iterativen Gleichung ist z.B. gleich 1:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}$$

Viele Attraktoren in physikalischen Systemen sind im Phasenraum punktförmig, d.h. das bewegliche Objekt des Systems bleibt schliesslich an ei-

ner bestimmten Stelle stehen. Es gibt aber auch Attraktoren, die im Phasenraum eine geschlossene Kurve bilden. Solche Attraktoren stellen dann eine periodische Bewegung des Objekts im System dar, z.B. das reibungsfreie Schwingen einer Feder. Ausserdem gibt es Attraktoren, die weder punktförmig sind, noch eine geschlossene Kurve bilden, sondern unendlich oft gewundene und gefaltete, sich nie selbst schneidende Kurven sind. Diese Attraktoren heissen seltsame Attraktoren und sind mit chaotischen Bewegungen gleichzusetzen. Ein System kann auch mehrere Attraktoren verschiedener Art besitzen.

Grundsätzlich darf sich eine Attraktorkurve im Phasenraum aufgrund des Determinismus niemals selbst schneiden oder berühren, ausser sie beschreibt eine periodische Bewegung. Ansonsten würde ein gleicher Impuls des Objekts am gleichen Ort unterschiedliche Fortgänge der Bahnkurve zulassen, was eine Verletzung des Prinzips der schwachen Kausalität bedeuten würde.

Erwähnenswert ist noch, dass es in eindimensionalen Systemen (2-dimensionaler Phasenraum) keine chaotischen Bewegungen geben kann, da der Phasenraum durch Ort und Impuls begrenzt ist und es keine Überschneidungen des Attraktors geben darf. Für chaotische Bewegungen ist als mindestens ein 3-dimensionaler Phasenraum notwendig.

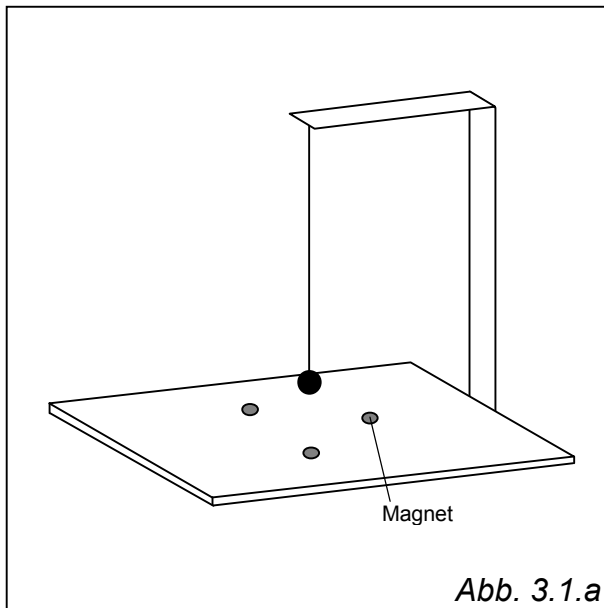
3. Das Magnetpendel als nichtlineares System

3.1. Versuchsaufbau

Das Magnetpendel besteht aus den folgenden Komponenten:

- eine Holzplatte (1m x 1m x 5-10mm),
- 2-3 Holzlatten/-bretter als Pendelaufhängung (1,5m hoch),
- drei starke Scheibenmagnete (z.B. Pinnwand-Magnete, 20-30mm gross, genaue Stärke nicht relevant),
- eine Metallkugel (z.B. aus Eisen, 20-30mm gross),
- eine dünne Schnur (z.B. Nähgarn).

Diese Komponenten werden wie folgt zusammengesetzt: Die Holzplatte dient als Grundlage, auf der der Versuch montiert werden wird. Eine grössere Dicke der Platte ist günstiger, da sich die Platte dann nicht so stark verformen kann; dünnere Platten krümmen sich meist etwas. Die Holzlatten werden zu einer Art Galgen zusammenmontiert, welcher als Aufhängung für das Pendel dient.



Die Aufhängung sollte etwa 1,5m hoch sein. Die Aufhängung wird dann auf der Platte befestigt. Am oberen Ende der Aufhängung wird die Schnur befestigt. Das andere Ende der Schnur verbindet man mit der Metallkugel, und zwar am besten durch Festkleben des Fadens mit Sekundenkleber. Die Fadlänge sollte etwas unter 1,5m sein, damit die Kugel in ihrer Ruhelage nicht mehr als 20mm über der Holzplatte schwebt.

Die Magneten werden zunächst in der Formation eines gleichseitigen Dreiecks auf der Holzplatte befestigt. Die x/y -Positionen der drei Magnete (in mm, Mitte der Platte: $P_0=(0/0)$) sind folgende: $P_1=(0/300)$, $P_2=(-330/-100)$, $P_3=(330/-100)$. Die Magnete sollten nicht permanent fixiert werden, damit es später möglich ist, ihre Positionen zu verändern. Am besten klebt man sie mit je einem Stück doppelseitiger Klebefolie fest, so dass man sie leicht wieder entfernen kann. In *Abb. 3.1.a* ist der Versuchsaufbau schematisch dargestellt.

3.2. Durchführung und Deutung

Die Magnete sind zuerst in der oben beschriebenen Dreiecksformation angeordnet. Man lässt die Kugel nun von einer bestimmten (vorher z.B. mit einem Filzstift markierten) Stelle der Holzplatte aus los, so dass sie zunächst anfängt, sich in Richtung auf die Plattenmitte in ihre Ruhelage zurückzubewegen. Schon nach sehr kurzer Zeit allerdings ist eine mehr oder weniger starke Ablenkung durch mindestens einen der Magnete zu beobachten, je nachdem ob man die Kugel sehr stark ausgelenkt (über etwa 200mm) hat oder nicht. Die Kugel schwingt nun auf der Platte in ziemlich unregelmässigen Bahnen herum, während sie von den einzelnen Magneten angezogen wird, bis sie schliesslich, durch Reibung (Luftreibung, innere Reibung des Pendels) stark genug abgebremst, über einem der Magneten zum stehen kommt. (Es sind unter seltenen Umständen auch andere Beobachtungen möglich, dazu jedoch später mehr.)

Wenn man Lust hat, kann man versuchen, vorherzusagen, welcher der Magneten die Kugel zu guter Letzt anziehen wird. Für einige Ausgangspositionen in der Nähe der Magneten wird es nicht schwierig sein, eine zuverlässige Vorhersage zu treffen, während es für andere nahezu unmöglich ist. Die drei Magneten stellen hier punktförmige Attraktoren des Systems dar. In den *Abb. 3.2.abc* sind die Bahnverläufe des Pendels für verschiedene Startpositionen zu sehen.

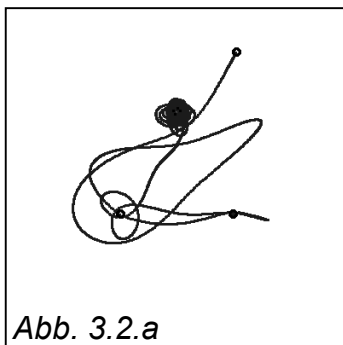


Abb. 3.2.a

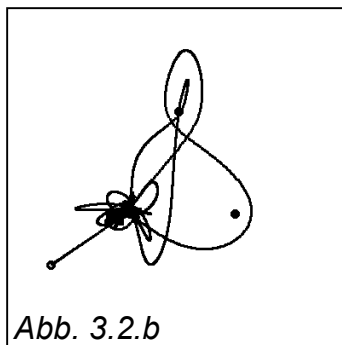


Abb. 3.2.b

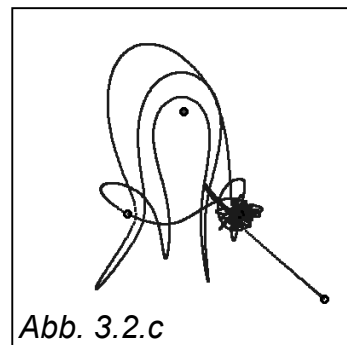
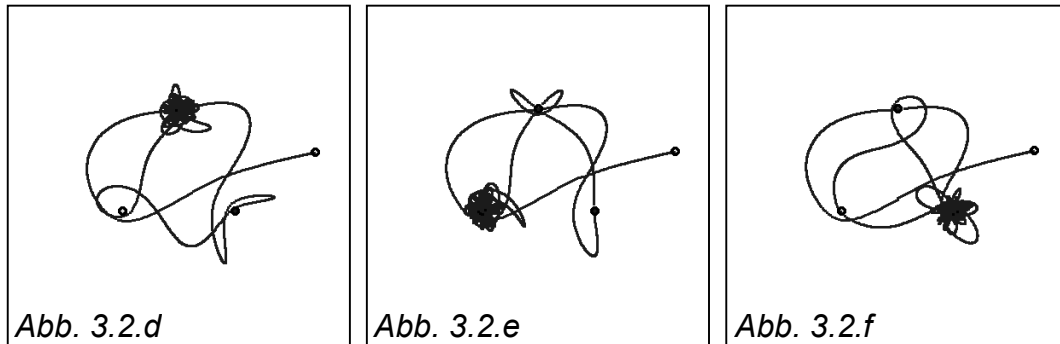


Abb. 3.2.c

Nach einigem Probieren erkennt man, dass selbst bei nahezu gleichen Startpositionen die Bahn des Pendels schon nach kurzer Zeit völlig anders verläuft als kurz zuvor. Wie man hier sieht, wird hier also das Prinzip der starken Kausalität verletzt: ähnliche Ursachen haben keineswegs ähnliche Wirkungen. Der Fehler in den Anfangsbedingungen vervielfacht sich schon nach kurzer Zeit, so dass sich wohl über längere Zeitspannen keine brauchbare Prognose über den Verlauf der Pendelbahn machen lässt. Genauer betrachtet wächst dieser Fehler in einigen Bereichen der Bahn nicht linear, sondern exponentiell, und zwar mit dem Faktor $e^{\lambda t}$, wobei λ der bereits angesprochene LIAPUNOV-Exponent ist. Dieser Exponent ist allerdings nicht für die gesamte Pendelbahn konstant.

In den *Abb. 3.2.def* sind wiederum Pendelbahnen zu sehen, allerdings mit nur geringen Unterschieden in den Startpositionen. In *Abb. 3.2.d* ist die Startposition des Pendels (160/-29), in *Abb. 3.2.e* (160/-30) und in *Abb. 3.2.f* (160/-31). Diese Koordinaten beziehen sich auf das Koordinatensystem, das in der Computer-Simulation verwendet wird. Man sieht also, dass selbst Unterschiede von nur einem Pixel (Grafikpunkt) zu völlig anderen Bahnverläufen führen können.



Wie bereits angedeutet, gibt es noch einige Besonderheiten, die man unter Umständen beobachten kann:

- Wenn die Gravitation sehr hoch ist, kann das Pendel auch in seiner Ruhelage zum Stehen kommen. Je höher die Gravitation, desto mehr Startpositionen gibt es, die zu einem solchen Ergebnis führen. Diese Positionen lassen sich auch durch die Simulation berechnen.
- Es kann bei bestimmten Startpositionen zu quasiperiodischen und bei einem reibungsfreien System sogar zu periodischen Bahnen kommen, die sehr wohl eine Regelmässigkeit erkennen lassen.

Man kann den Versuch ausserdem auf diese Weisen variieren:

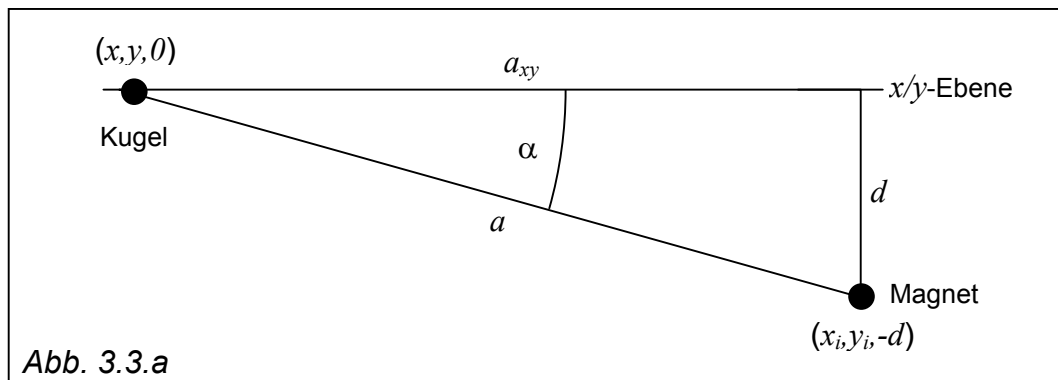
- Man ändert die Positionen der Magnete,
- Man verwendet Magnete mit anderer (vielleicht sogar unterschiedlicher) Stärke,
- Man verwendet eine Kugel mit anderer Masse,
- Man ändert die Reibung des Versuchs (z.B. Verlagerung der Anordnung in eine Flüssigkeit).

3.3. Numerische Behandlung

Zunächst machen wir einige Annahmen:

- Im Vergleich zum Abstand der Metallkugel zu der Ebene, in der sich die Magneten befinden, ist die Pendellänge sehr gross. Vereinfachend kann man daher annehmen, dass sich die Kugel in einer Ebene parallel zur Holzplatte bewegt.
- Die Magneten werden, wie die Kugel, als punktförmig angesehen.
- Ausserdem ist die Kraft F_i , die ein Magnet auf die Kugel ausübt, indirekt proportional zum Quadrat ihres Abstands zu diesem Magneten.

Im Folgenden gehen wir von dem in *Abb. 3.3.a* dargestellten Modell aus:



Nun greifen verschiedene Kräfte an der Kugel an:

- Die Anziehungskräfte F_i der einzelnen Magneten,
- Die Gewichtskraft F_g der Kugel,
- Die Reibungskraft (hauptsächlich Luftreibung),
- Die Zentripetalkraft, welche allerdings ignoriert werden kann, da sie stets senkrecht zur Bewegungsrichtung des Pendels wirkt, und somit allenfalls dazu dient, Verformungsarbeit am Pendel und an der Aufhängung zu leisten.

Die Anziehungskraft eines Magneten i auf die Kugel ist laut dem Gesetz von COULOMB indirekt proportional zum Quadrat des Abstands zwischen Magnet und Kugel:

$$F_{i,xyz} \sim \frac{1}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2}$$

Da die Bewegung der Kugel jedoch auf die x/y-Ebene beschränkt ist, müssen wir diese Kraft F_i mit dem Kosinus des Winkels α multiplizieren, um den in der x/y-Ebene wirkenden Anteil von F_i zu erhalten:

$$F_{i,xy} = F_i \sim \frac{1}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2} \cdot \cos \alpha$$

Der Kosinus des Winkels zwischen der Anziehungskraft des Magneten und der x/y-Ebene ist der Richtungskosinus des Kraftvektors:

$$\cos \alpha = \frac{a_{xy}}{a}$$

mit a_{xy} als Abstand zwischen Magnet und Kugel in der x/y-Ebene und a als eigentlichem Abstand zwischen Magnet und Kugel unter Berücksichtigung des vertikalen Abstands d . So folgt:

$$\vec{F}_i \sim \frac{1}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_x \\ \cos \alpha_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_i \sim \frac{1}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_i - x}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2}} \\ \frac{y_i - y}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_i \sim \frac{1}{\left(\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2}\right)^3} \cdot \begin{pmatrix} x_i - x \\ y_i - y \end{pmatrix}$$

Dies ist der Vektor der Anziehungskräfte zwischen der Kugel und jedem der Magneten, die in der x/y-Ebene wirken.

Für die Gewichtskraft F_g auf die Kugel gilt:

$$\vec{F}_g \sim - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Reibungskraft F_r wirkt entgegen der Bewegungsrichtung der Kugel und ist direkt proportional zu ihrer Geschwindigkeit:

$$\vec{F}_r \sim - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Für die Gesamtkraft, die auf die Kugel wirkt, gilt nun:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\left(\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2}\right)^3} \cdot \begin{pmatrix} x_i - x \\ y_i - y \end{pmatrix} - C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - R \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

wobei C eine Konstante zur Gewichtskraft und R eine Konstante zur Reibungskraft ist.

Das zweite Gesetz von NEWTON beschreibt den Zusammenhang zwischen der Kraft auf eine Masse und der daraus resultierenden Beschleunigung dieser Masse:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \text{oder:} \quad s'' = \frac{F}{m}$$

Die Masse ist eine Konstante, für die Einzelbeschleunigungen der Kugel in x- bzw. y-Richtung gilt daher:

$$x'' = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i - x}{\left(\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2}\right)^3} - C \cdot x - R \cdot x'$$

$$y'' = \sum_{i=1}^3 \frac{y_i - y}{\left(\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2}\right)^3} - C \cdot y - R \cdot y'$$

Daraus ergeben sich die allgemeinen Differentialgleichungen des Magnetpendels:

$$x'' + R \cdot x' + C \cdot x - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i - x}{\left(\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2}\right)^3} = 0$$

$$y'' + R \cdot y' + C \cdot y - \sum_{i=1}^3 \frac{y_i - y}{\left(\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2}\right)^3} = 0$$

Die computergestützte Simulation verwendet eine iterative Berechnung der Einzelbeschleunigungen.

3.4. Computer-Simulation

Zum Magnetpendel-Versuch soll nun eine rechnergestützte Simulation entwickelt werden. Da wir bereits die Gleichungen für die Beschleunigung des Pendels in x- und y-Richtung erhalten haben, ist dies kein grosses Problem. Wir verwenden ein Iterationsverfahren, bei dem wir in kleinen konstanten Zeitschritten die auf das Pendel wirkende Beschleunigung berechnen. Daraus ergibt sich dann die Geschwindigkeitsänderung, und aus dieser wiederum die Ortsänderung des Pendels.

Die Simulation basiert auf einem Koordinatensystem mit den Abmessungen $x,y \in [-200; 199]$. Diese Begrenzung dient nur der sinnvollen Skalierung der Ausgabefläche und ist prinzipiell nicht von Nöten. Die Ruhelage des Pendels liegt bei (0/0).

Im Programm kommen folgende Konstanten vor:

- dt Zeitschritt
- C Gravitationskonstante (auch: Masse des Pendels)
- R Reibungskonstante
- d Abstand der x/y-Ebene zur Magnetenebene
- x_i Positionen der Magneten in x-Richtung
- y_i Positionen der Magneten in y-Richtung
- M_i Stärke der Magneten

Ausserdem gibt es folgende Startwerte:

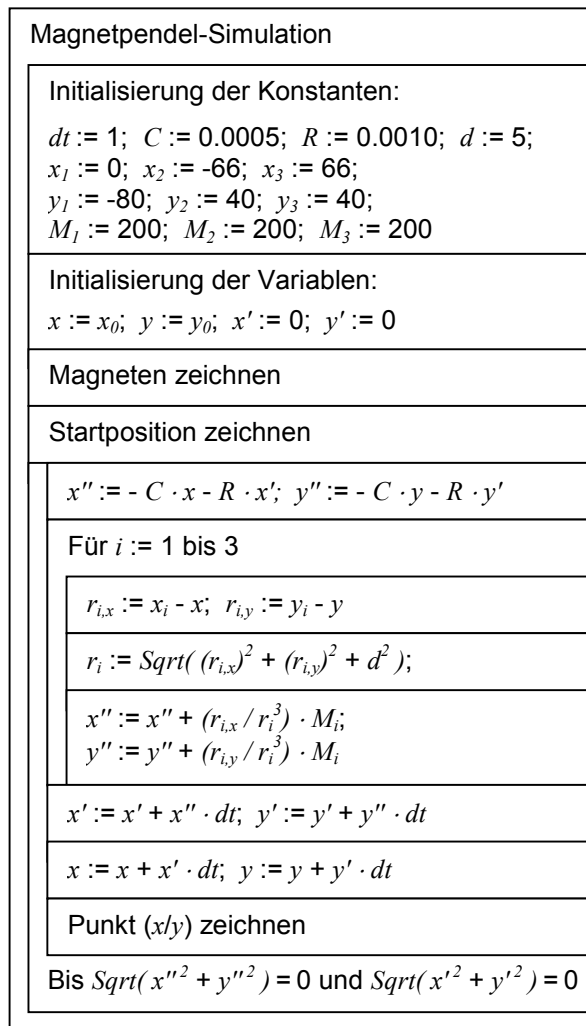
- x_0 Startposition des Pendels in x-Richtung
- y_0 Startposition des Pendels in y-Richtung

Des weiteren werden diese Variablen verwendet:

- x Position des Pendels in x-Richtung
- y Position des Pendels in y-Richtung
- x' Geschwindigkeit des Pendels in x-Richtung
- y' Geschwindigkeit des Pendels in y-Richtung
- x'' Beschleunigung des Pendels in x-Richtung
- y'' Beschleunigung des Pendels in y-Richtung
- r_i Abstand des Pendels zum Magneten i
- $r_{i,x}$ Abstand in x-Richtung
- $r_{i,y}$ Abstand in y-Richtung

Als Abbruchbedingung wählen wir folgende: Sowohl die Beschleunigung als auch die Geschwindigkeit des Pendels sollen 0 sein. In der Realität wird das problematisch sein, da das Pendel eigentlich nie völlig stehen bleibt, sondern nur immer langsamer wird, bis eine Bewegung nicht mehr zu erkennen ist.

Es folgt das Struktogramm zur Magnetpendel-Simulation:



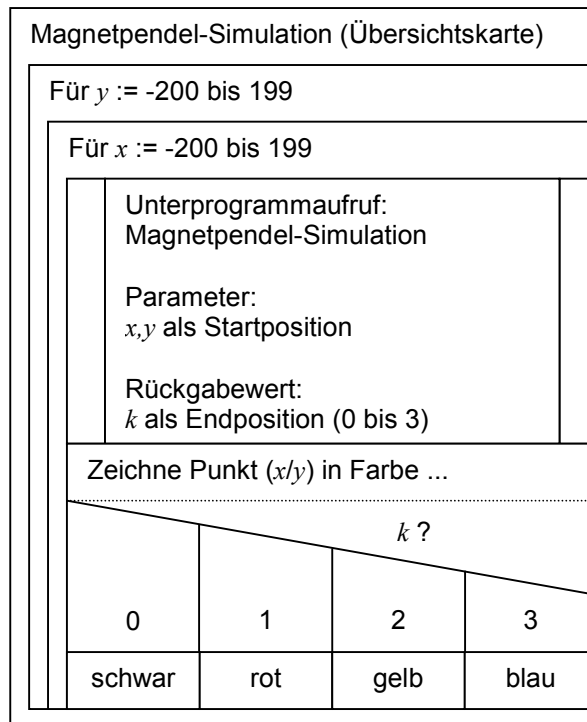
Nun wäre es interessant, herauszufinden, für welche Startpositionen das Pendel am Schluss über einem bestimmten Magneten stehen bleibt. Man kann dies dadurch erreichen, dass man eine Reihe von Experimenten für alle Startpositionen des Koordinatensystems mit $x, y \in [-200; 199]$ durchführt, und jeweils den Magneten notiert, über dem die Kugel zur Ruhe kommt. Im folgenden Computeralgorithmus werden Übersichtskarten berechnet, die die jeweilige Endposition des Pendels für alle Startpositionen des Koordinatensystems zeigen.

Diese zweite Berechnungsroutine verwendet die erste als Unterprogramm. Das Zeichnen der Bahnpunkte in der Unterroutine darf natürlich nicht erfolgen, da sonst die Ausgaben des Hauptprogramms beeinträchtigt würden. Die Unterroutine ist daher entsprechend abzuändern.

Folgende Variablen werden verwendet:

- x Startposition des momentan berechneten Bahnverlaufs
- y Startposition des momentan berechneten Bahnverlaufs
- k Nummer des Magneten, über dem das Pendel stehen bleibt (1 bis 3; 0 falls Ruhelage)

Struktogramm zur Magnetpendel-Übersichtskarten-Simulation:



Eine mögliche Ausgabe des Programms ist in den *Abb. 3.4.abc* zu sehen. Die drei Abbildungen zeigen die Einzugsgebiete des Pendels für den ersten (roten) Magneten (*a*), für den zweiten (gelben) Magneten (*b*) und für den dritten (blauen) Magneten (*c*). Die Abbildungen wurden mit folgenden Daten erstellt: $C=0.0001$, $R=0.0020$. Man beachte, dass die Kombination aller drei Abbildungen zu einer völlig ausgefüllten Fläche führt, da es bei dieser niedrigen Gravitationskonstante nicht dazu kommt, dass das Pendel in seiner Ruhelage stehen bleibt und es somit stets von einem der drei Magneten eingefangen wird. Sehr gut wird hier auch die Konkurrenz der drei Attraktoren des Magnetpendels visualisiert.

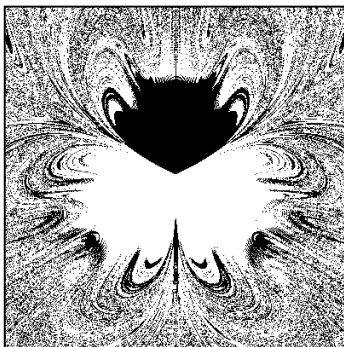


Abb. 3.4.a

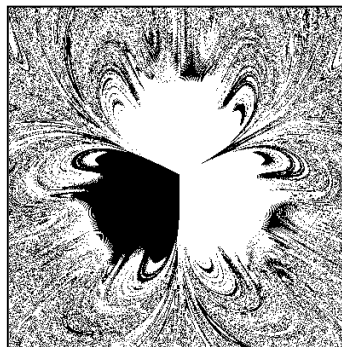


Abb. 3.4.b

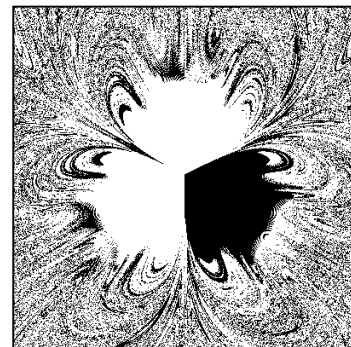


Abb. 3.4.c

Nun kann man anhand dieser Übersichtskarten sehr gut untersuchen, welchen Einfluss die Gravitation und die Reibung auf den Versuch nehmen. Die folgenden *Abb. 3.4.def* sind das Ergebnis von Berechnungen mit unterschiedlichen Konstanten. Im linken Bild ist $C=0.0005$ und $R=0.0010$, im mittleren ist $C=0.0001$ und $R=0.0020$, im rechten ist $C=0.0000$ und $R=0.0030$.

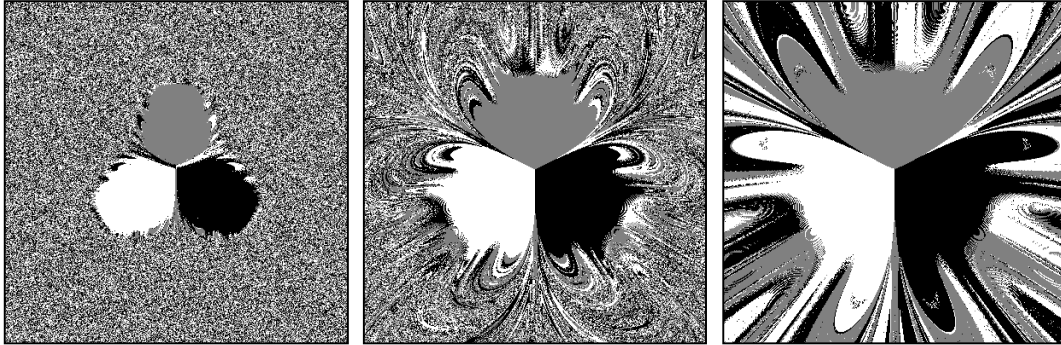


Abb. 3.4.d

Abb. 3.4.e

Abb. 3.4.f

Man sieht hier gut, dass eine grössere (kleinere) Schwerkraft (gleichbedeutend mit einer grösseren (kleineren) Pendelmass) auch die Sensitivität des Systems erhöht (senkt). Links ist nur in der unmittelbaren Nähe jedes Magneten eine Ordnung zu erkennen, und zwar in einer Entfernung, in der es dem Pendel nicht gelingt, den Einflussbereich des jeweiligen Magneten, in dessen Nähe es gestartet ist, überhaupt zu verlassen. Weiter entfernt findet man nur das totale Chaos, und es ist nicht möglich, vorherzusagen, welcher Magnet das Pendel schliesslich einfangen wird. Im Gegensatz dazu sorgt die höhere Reibung im mittleren und vor allem im rechten Bild für eine Desensitivierung.

4. Die Simulations-Programme

Die Magnetpendel- und Magnetpendel-Übersichtskarten-Simulationsprogramme sind in Borland Delphi 3.0 verfasst und laufen unter Windows 95 und Windows NT 4.0.

Die Programme sowie deren Quellcodes sind unter der folgenden Adresse im Internet zu erhalten:

<http://www.mehnle.net/papers/intro-to-non-linear-dynamics>

Die Programme sind Freeware, jedoch kein Public Domain, dürfen also beliebig kopiert werden. Eine Veränderung der Quellcodes bzw. der Kompilate ist nur zu privaten Zwecken erlaubt.

Für Anregungen und Verbesserungsvorschläge schreiben Sie bitte an:

julian@mehnle.net

5. Literaturverzeichnis

Folgende Publikationen wurden bei der Anfertigung der Facharbeit verwendet:

- [01] Fraktale Geometrie und deterministisches Chaos,
Handreichung für den Mathematik- und Physikunterricht im Gymnasium,
Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung, München,
München 1997.

- [02] Physik, Leistungskurs 3. Semester,
Theorie der Wärme, Atomphysik,
A. Müller, E. Leitner, W. Dilg, Ehrenwirth Verlag
München 1989.

6. Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Hilfsmittel verwendet habe.

_____, den _____
Julian Mehnle